

# Устойчивость пространственно-временных солитонов в многомодовых волокнах

О.В. Штырина<sup>1,2</sup>, И.С. Чеховской<sup>1,2,\*</sup>, Ю.С. Кившарь<sup>3</sup>,  
С.К. Турицын<sup>1,4</sup>, И.А. Яруткина<sup>1,2</sup>, М.П. Федорук<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Новосибирский государственный университет

<sup>2</sup>Институт вычислительных технологий СО РАН

<sup>3</sup>Австралийский Национальный Университет, Канберра, Австралия

<sup>4</sup>Астонский Университет, Бирмингем, Великобритания

\*E-mail: [i.s.chekhovskoy@gmail.com](mailto:i.s.chekhovskoy@gmail.com)

DOI:10.31868/RFL2018.114-115

Распространение импульсов в многомодовых волокнах с градиентным индексом (ММФ) описывается в параксиальном приближении стандартным нелинейным уравнением Шредингера (NLSE), полученным для медленно меняющейся огибающей импульса (включающей все моды) [1]:

$$i \frac{\partial \psi}{\partial Z} = \frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial T^2} - \frac{1}{2k_0} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y'^2} \right) + U(x', y') \psi - \gamma |\psi|^2 \psi \quad (1)$$

где  $k_0$  – волновое число центральной частоты  $\omega_0$ ,  $\beta_2$  – дисперсия групповых скоростей и  $\gamma$  – нелинейность,  $\psi$  – медленно меняющаяся огибающая на центральной частоте  $\omega_0$  от времени  $T$  в системе отсчета, движущейся с групповой скоростью импульса. Рассмотрим эффективный потенциал  $U(x', y') = (k_0 \Delta / R^2)(x'^2 + y'^2)$ , где  $\Delta$  – разность индексов сердцевины и оболочки, а  $R$  – радиус сердцевины волокна. Рассмотрим направляющую среду в случае  $\Delta > 0$ .

Уравнение (1) имеет гамильтонову структуру и может быть переписано в безразмерном виде путем замены переменных,  $\psi = \sqrt{P_{norm}} A_s$ ,  $T = T_0 t$ ,  $(x', y') = r_0(x, y)$ ,  $Z = Z_0 z$  и  $\mu = 2\Delta k_0^2 r_0^4 / R^2$  (с  $(\gamma P_{norm})^{-1} = T_0^2 / |\beta_2| = k_0 r_0^2 = Z_0$ ):

$$i \frac{\partial A}{\partial z} = \frac{\delta H}{\delta A^*} = -\frac{\sigma}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} \right) + \frac{\mu}{2} (x^2 + y^2) A - |A|^2 A \quad (2)$$

где  $\sigma = \text{sign}(\beta_2) = \pm 1$  (соответствует аномальной или нормальной дисперсии), а гамильтониан задается выражением:

$$H = (\sigma I_t + I_x + I_y + \mu I_3 - I_4) = \int dx dy dt \left[ \sigma |A_t|^2 + |A_x|^2 + |A_y|^2 + \mu(x^2 + y^2) |A|^2 - |A|^4 \right]$$

Существования солитонных решений недостаточно для анализа динамики нелинейных систем. Критической проблемой является устойчивость этих стационарных решений относительно различных возмущений. В 2- и 3-мерных NLSE солитоны неустойчивы, и любое начальное распределение с достаточно высокой мощностью  $P$  коллапсирует к сингулярности [2,3]. В гамильтоновых системах, когда гамильтониан в рассматриваемой модели ограничен и решение соответствует его минимуму, соответствующий солитон является аттрактором. Если гамильтониан неограничен, то солитонные решения соответствуют седловым точкам гамильтониана и неустойчивы, как, например, в 3-мерном NLSE. В этом случае стационарного состояния не существует, и начальный волновой пакет либо диспергирует, что эффективно демонстрирует линейная динамика, либо начальное распределение поля коллапсирует, что математически соответствует образованию сингулярности поля.

Применяя стандартный вариационный подход [2,3] и следуя предыдущим исследованиям [1], мы анализируем устойчивость солитонов. Подход

основывается на вариационном представлении (2) и аппроксимации решения  $A(z,t,x,y)$  с помощью некоторой пробной функции. В качестве пробной функции выберем Гауссову, энергию которой будем обозначать  $P$ ,

$$A(x, y, t, z) = \frac{\sqrt{P_0}}{a(z)b^{1/2}(z)} \exp\left[-\frac{x^2 + y^2}{2a^2(z)} - \frac{t^2}{2b^2(z)}\right] \times \exp[-ia(z)(x^2 + y^2) - i\beta(z)t^2].$$

Гамильтониан теперь представим как функционал от масштабируемых параметров  $a$  и  $b$ :  $H(a, b) = \frac{P_0 \pi^{3/2}}{2} \left( \frac{\sigma}{2b^2} + \frac{1}{a^2} + \mu a^2 - \frac{P_0}{2\sqrt{2}a^2 b} \right)$

Устойчивым солитонам при  $\sigma = 1$  соответствуют минимумы гамильтониана  $H(a, b)$ . Простой анализ экстремумов  $H$  приводит к следующему условию существования локальных минимумов  $H$ :

$$(P_0/4)^4 < 1/27\mu. \quad (3)$$

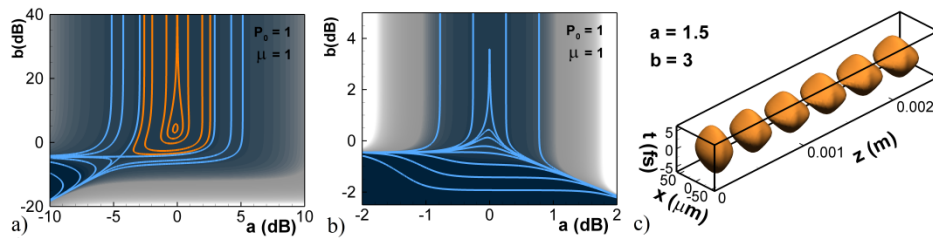


Рис.1. Гамильтониан  $H(a, b)$  для  $\mu = 1$  и  $P_0 = 1$ . Здесь  $\sigma = 1$  (а) и  $\sigma = -1$  (б). На (а) оранжевые кривые соответствуют траекториям устойчивой солитоноподобной динамики входного гауссовского импульса. (с) Результаты численного моделирования: изоповерхности  $|A|^2(x, 0, t, z)$  представляют собой режим световой пули с солитонной динамикой в аномальном ММФ.

Рис. 1а показывает появление локальных минимумов при выполнении критерия существования. Чтобы описать параметры гауссовского импульса из оранжевой области, определим координаты седлового экстремума:

$$a_s^2 = \frac{2}{\sqrt{3\mu}} \cos\left(\frac{\varphi}{3} - \frac{2\pi}{3}\right), \quad b_s = \frac{2\sqrt{2}}{P_0} a_s^2,$$

где  $\cos(\varphi) = -\sqrt{27\mu} \left(\frac{P_0}{4}\right)^2$ . Если выполнено условие (3), то область устойчивой солитонной динамики может быть определена следующим образом:

$$a > a_s \text{ и } b > b_s \text{ и } H(a, b) < H(a_s, b_s). \quad (4)$$

Рис. 1с демонстрирует типичную солитоноподобную динамику импульса, который удовлетворяет условиям (4). Наблюдаются колебания начального гауссовского импульса вблизи основной моды. Вариационный анализ подтверждает, что в нормальном дисперсионном волноводе (при  $\sigma = -1$ ) устойчивых солитонных структур не существует. Рис. 1б показывает отсутствие минимума Гамильтона. Существование локального экстремума по параметру  $a$  при выполнении (4) подтверждает периодическую динамику пространственной длительности сигнала, период которой определяется длиной дифракции. Работа была выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект 17-72-30006).

## Литература

- [1] S. Raghavan, G. P. Agrawal, *Opt. Commun.* **180**, 377-382 (2000).
- [2] V.E. Zakharov, E.A. Kuznetsov, *Phys. Usp.* **5**, 535-556 (2012).
- [3] E.A. Kuznetsov, "Wave collapse in nonlinear optics," In Self-focusing: Past and Present. Topics in Applied Physics 114, (Springer, 2009), pp. 175-190.